×50× ECOLE POLYTECHNIQUE
CONCOURS D'ADMISSION 1977

OPTION P'

## DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (4 h)

L'espace affine euclidien orienté E de dimension 2 est rapporté à un repère orthonormé direct $(0, \vec{i}, \vec{j})$. Les courbes $\Gamma$ de E considérées dans ce problème sont orientées et l'on choisit sur $\Gamma$ une origine. On désigne par $\vec{t}$ le vecteur unitaire de la tangente orientée en un point M de $\Gamma$ et par $\vec{n}$ le vecteur unitaire tel que l'on ait $(\vec{t}, \vec{n}) = +\frac{\pi}{2}$.

a est un nombre réel strictement positif donné.

A tout point M de $\Gamma$, défini par son abscisse curviligne s, on associe le point M' déterminé par

$$\| \overrightarrow{MM'} \| = 2a \quad , \qquad (\vec{t}, \overrightarrow{MM'}) = \varphi \quad ,$$

où $\varphi$ est donné en fonction de s et appartient à $]-\pi, 0[ \cup ]0, +\pi[$ ; on suppose que la fonction $s \longmapsto \varphi$ est continûment dérivable. On désigne par $C_M$ le cercle tangent en M à $\Gamma$ et passant par M'. Le centre de $C_M$ est désigné par $\omega$ et le milieu de MM' par I.

Quand M décrit $\Gamma$, M' décrit une courbe $\Gamma'$, $\omega$ une courbe $\Sigma$ et I une courbe $\mathcal{C}$. On dira que la fonction $s \longmapsto \varphi$ est *admissible* si, pour tout point M de $\Gamma$, la tangente à $\Gamma'$ au point M' est tangente en ce point au cercle $C_M$.

### Partie I

Dans cette partie, on suppose que $\Gamma$ est la droite passant par 0 et de vecteur directeur $\vec{i}$. L'orientation de $\Gamma$ est telle que l'on ait $\vec{t} = \vec{i}$ et l'on prend 0 comme origine. On désigne par x l'abscisse de M sur $\Gamma$.

1°/ Quelles sont les fonctions admissibles $x \longmapsto \varphi$ qui sont constantes ? Déterminer (par intégration d'une équation différentielle) les autres fonctions admissibles.

2°/ Former l'équation cartésienne de la courbe $\Sigma$ correspondant à l'une quelconque des fonctions admissibles non constantes. Déterminer la tangente à $\Sigma$ en $\omega$ ; en donner une caractérisation géométrique.

.../...

3° / Donner une représentation paramétrique de la courbe $\Gamma'$ correspondant à l'une quelconque des fonctions admissibles non constantes. Tracer $\Gamma'$. Montrer que l'on a

$$\left\| \frac{\overrightarrow{dM'}}{dx} \right\| = 1$$

et déterminer le centre de courbure de $\Gamma'$ en $M'$.

4° / Donner une représentation paramétrique de la courbe $\mathcal{C}$ correspondant à l'une quelconque des fonctions admissibles non constantes. Quelle est la tangente à $\mathcal{C}$ en I ?

## Partie II

$\Gamma$ est maintenant une courbe admettant en chaque point un rayon de courbure fini et non nul. On désigne par J le centre de courbure de $\Gamma$ en M et par R le rayon de courbure algébrique (c'est-à-dire que l'on a $\overrightarrow{MJ} = R\vec{n}$). La fonction $s \longmapsto R$, considérée comme une donnée, est supposée continue.

1° / Former une équation différentielle du premier ordre $(\mathcal{E})$ telle que les fonctions admissibles $s \longmapsto \varphi$ soient les solutions de $(\mathcal{E})$ ou des fonctions constantes (il est entendu que l'on se limite aux solutions de $(\mathcal{E})$ à valeurs dans $]-\pi, 0[ \cup ]0, +\pi[$).

Peut-on choisir $\Gamma$ de façon que, parmi les solutions de $(\mathcal{E})$, il y en ait au moins une qui soit elle-même constante ?

2° / Donner une caractérisation géométrique de la tangente en $\omega$ à la courbe $\Sigma$ correspondant à l'une quelconque des solutions de $(\mathcal{E})$, $\omega$ et J étant supposés distincts.

3° / Montrer que, pour toute courbe $\Gamma'$ correspondant à une solution de $(\mathcal{E})$, on a

$$\left\| \frac{\overrightarrow{dM'}}{ds} \right\| = 1 \quad .$$

On désigne par $\overrightarrow{n'}$ le vecteur unitaire tel que l'on ait $\left( \frac{\overrightarrow{dM'}}{ds}, \overrightarrow{n'} \right) = +\frac{\pi}{2}$, par J' le centre de courbure de $\Gamma'$ en M' et par R' le rayon de courbure algébrique (c'est-à-dire que l'on a $\overrightarrow{M'J'} = R'\overrightarrow{n'}$). Trouver une relation entre R, R' et $\varphi$.

Montrer que I, J et J' sont alignés.

4° / Quelle est la tangente en I à la courbe $\mathcal{C}$ correspondant à l'une quelconque des solutions de $(\mathcal{E})$, $\varphi$ étant supposé distinct de $+\frac{\pi}{2}$ et de $-\frac{\pi}{2}$ ?

## Partie III

Dans cette partie, on prend pour $\Gamma$ la courbe définie, dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$, par la représentation paramétrique

$$x = a \operatorname{Log} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + 2a \cos \alpha \ ,$$

$$y = 2a \sin \alpha \ ,$$

$\alpha$ décrivant l'intervalle $]0, +\pi[$ .

1°/ Vérifier que $\Gamma$ est l'une des courbes $\Gamma'$ obtenues à la question 3°/ de la partie I. Expliciter le rayon de courbure en fonction de $\alpha$ et écrire l'équation différentielle $(\mathcal{E}_1)$ obtenue à partir de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ (définie dans la partie II) en prenant $\alpha$ comme variable au lieu de $s$ .

Trouver une solution particulière $f$ de $(\mathcal{E}_1)$ et indiquer quelle est la courbe $\Gamma'$ correspondante.

2°/ On pose

$$\lambda = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \ .$$

Ecrire l'équation différentielle $(\mathcal{E}_2)$ obtenue à partir de $(\mathcal{E}_1)$ en prenant comme inconnue la fonction $\alpha \longmapsto \lambda$ au lieu de $\alpha \longmapsto \varphi$ .

On désignera par $g$ la solution $\alpha \longmapsto \operatorname{tg} \frac{f(\alpha)}{2}$ de $(\mathcal{E}_2)$ .

3°/ On se propose de déterminer les autres solutions de $(\mathcal{E}_2)$ (sans se limiter aux solutions qui ne s'annulent pas). On n'imposera pas à ces solutions d'être définies sur l'intervalle $]0, +\pi[$ tout entier et on admettra que, si une solution $\alpha \longmapsto \lambda$ , définie sur un intervalle $\mathcal{J}$ contenu dans $]0, +\pi[$ , est distincte de la restriction de $g$ à $\mathcal{J}$ , $\lambda - g(\alpha)$ ne s'annule en aucun point de $\mathcal{J}$ .

On pose

$$\psi = \frac{1}{\lambda - g(\alpha)} \ .$$

Ecrire l'équation différentielle $(\mathcal{E}_3)$ obtenue à partir de $(\mathcal{E}_2)$ en prenant comme inconnue la fonction $\alpha \longmapsto \psi$ au lieu de $\alpha \longmapsto \lambda$ ; on vérifiera que $(\mathcal{E}_3)$ est linéaire. Par intégration de $(\mathcal{E}_3)$, trouver les solutions de $(\mathcal{E}_2)$ cherchées. En existe-t-il qui soient définies sur $]0, +\pi[$ tout entier ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail